ISRAEL JOURNAL OF MATHEMATICS, Vol. 37, Nos. 1-2, 1980

# SEPARABILITE VAGUE DANS L'ESPACE DES MESURES SUR UN COMPACT

PAR
MICHEL TALAGRAND

ABSTRACT

Using the continuum hypothesis we construct a compact space $K$ such that the space $M(K)$ of measures on $K$ is vaguely separable, i.e., that $\mathscr{C}(K)$ is injected into $l^\infty$, but that $\mathscr{C}(K)$ is not isomorphic to a subspace of $l^\infty$. It is shown that if $\mathscr{C}(K)$ is isomorphic to a subspace of $l^\infty(\Gamma)$, $\mathscr{C}(K)$ is positively isometric to a subspace of $l^\infty(\Gamma)$. Nevertheless, under the continuum hypothesis one can construct a compact space $L$ such that the space $M_1^+(L)$ of probabilities on $L$ is vaguely separable, but $L$ cannot be the support of a measure $\mu$ with $L^1(\mu)$ separable in the norm.

## I. Introduction

Soit $K$ un espace compact. On pose $M(K) = \mathscr{C}(K)'$. On désigne par $M^+(K)$ le cône positif de $\mathscr{C}(K)$ et par $M_1^+(K)$ l'ensemble des probabilités sur $K$. On muni $M(K)$ et ses sous-ensembles de la topologie vague $\sigma(M(K), \mathscr{C}(K))$.

Considérons les propriétés suivantes, qui ont rapport à la séparabilité de $M(K)$, ou des formes équivalentes.

($P_0$) $K$ est séparable.

($P_1$) Il existe une mesure $\mu$ sur $K$, dont le support est $K$, et qui est telle que $L^1(\mu)$ est séparable.

($P_2$) $M_1^+(K)$ est vaguement séparable.

($P_2'$) Il existe une isométrie positive de $\mathscr{C}(K)$ sur un sous-espace de $l^\infty$.

($P_3$) $M^+(K)$ est vaguement séparable.

($P_3'$) Il existe une injection (linéaire) positive de $\mathscr{C}(K)$ dans $l^\infty$.

($P_4$) La boule unité de $M(K)$ est vaguement séparable.

($P_4'$) $\mathscr{C}(K)$ est isométrique à un sous-espace de $l^\infty$.

($P_5$) Il existe une partie dénombrable bornée de $M(K)$, dont l'adhérence vague contient une boule.

($P_5'$) $\mathscr{C}(K)$ est isomorphe à un sous-espace de $l^\infty$.

Received October 25, 1979 and in revised form March 26, 1980

($P_6$) $M(K)$ est vaguement séparable.

($P'_6$) Il existe une injection (linéaire continue) de $\mathscr{C}(K)$ dans $l^\infty$.

Il est facile de voir que l'on a

$$(P_0) \Rightarrow (P_1) \Rightarrow (P_2) \Leftrightarrow (P'_2) \Leftrightarrow (P_3) \Leftrightarrow (P'_3) \Leftrightarrow (P_4) \Leftrightarrow (P'_4) \Rightarrow (P_5) \Leftrightarrow (P'_5) \Rightarrow (P_6) \Leftrightarrow (P'_6).$$

Il est également facile de voir que $(P_1) \not\Rightarrow (P_0)$, comme le montre l'exemple du spectre de $L^\infty([0,1])$. Dans ce travail on va tout d'abord montrer que $(P'_5) \Rightarrow (P_4)$, et plus précisément que si un $\mathscr{C}(K)$ est isomorphe à un sous-espace de $l^\infty(\Gamma)$ (où $\Gamma$ est un ensemble infini), alors il est positivement isométrique à un sous-espace de $l^\infty(\Gamma)$. On montrera ensuite sous l'hypothèse du continu, que $(P_6) \not\Rightarrow (P_5)$. En un sens, l'exemple construit est plus fort qu'un exemple dû à W. Johnson et J. Lindenstrauss [3] d'un espace de Banach qui s'injecte dans $l^\infty$ sans en être isomorphe à un sous-espace. Il resoud par la négative un problème de Y. Benyamini [1]. On montrera enfin, toujours avec l'hypothèse du continu, que $(P_2) \not\Rightarrow (P_1)$, ce qui montre qu'une pathologie en théorie des $C^*$-algèbres [5] se produit déjà dans le cas commutatif.

L'auteur remercie I. Namioka et J. Wright d'avoir attiré son intérêt sur ces questions.

## II. $\mathscr{C}(K)$ isomorphes à un sous-espace d'un $l^\infty(\Gamma)$

II.1. Théorème. *Si $\mathscr{C}(K)$ est isomorphe à un sous espace de $l^\infty(\Gamma)$ alors $\mathscr{C}(K)$ est positivement isométrique à un sous-espace de $l^\infty(\Gamma)$.*

Preuve. On peut supposer $\Gamma$ infini, car sinon $\mathscr{C}(K) = l^\infty_n$ pour un certain $n$. Soit $T$ un opérateur de $\mathscr{C}(K)$ dans $l^\infty(\Gamma)$ et $k > 0$ tel que pour $f \in \mathscr{C}(K)$ on ait $k\|f\| \leqq \|T(f)\| \leqq \|f\|$.

Pour $\gamma \in \Gamma$, désignons par $e_\gamma$ la forme linéaire coordonnée correspondante sur $l^\infty(\Gamma)$, et posons $h_\gamma = {}^tT(e_\gamma)$. On a alors $\|h_\gamma\| \leqq 1$ et pour $f \in \mathscr{C}(K)$ on a $k\|f\| \leqq \sup_\gamma |h_\gamma(f)|$.

Remarquons que toute famille d'ouverts deux à deux disjoints de $K$ a un cardinal $\leqq \mathrm{card}.\Gamma$. En effet, chaque ouvert de la famille est chargé par l'une des $|h_\gamma|$, mais chaque $|h_\gamma|$ ne charge qu'un nombre au plus dénombrable d'ouverts.

Pour tout ouvert $U$ de $K$, $U \neq \emptyset$ posons

$$a(U) = \mathrm{Sup}\{|h_\gamma|(U);\ \gamma \in \Gamma\}.$$

On a $a(U) \geqq k$. Posons

$$b(U) = \mathrm{Inf}\{a(V);\ V \text{ ouvert} \subset U,\ V \neq \emptyset\}.$$

On a aussi $b(U) \geqq k$. Fixons un entier $n \geqq 2k$. Soit $\mathcal{F}_n$ la famille des ouverts $U$ de $K$ tels que $a(U) \leqq b(U) + n^{-1}$. Montrons que la réunion des ouverts de $\mathcal{F}_n$ est dense. Soit $W$ un ouvert de $K$. Soit $U \subset W$ tel que $a(U) \leqq b(W) + n^{-1}$. Alors $a(U) \leqq b(U) + n^{-1}$, donc $U \in \mathcal{F}_n$. Il s'ensuit que si l'on considère une famille $\mathcal{G}_n$ maximale d'ouverts de $\mathcal{F}_n$ deux à deux disjoints, la réunion de $\mathcal{G}_n$ est dense, et $\mathcal{G}_n$ est de cardinal $\leqq \text{card.}\,\Gamma$.

Soit $W$ un ouvert de $K$. Il existe $U \in \mathcal{G}_n$ avec $W \cap U \neq \emptyset$. On a donc $a(W \cap U) \geqq b(U)$. Il existe donc $\gamma \in \Gamma$ tel que

$$h_\gamma(W \cap U) \geqq b(U) - n^{-1} \geqq a(U) - 2n^{-1} \geqq |h_\gamma|(U) - 2n^{-1}$$

d'où puisque $|h_\gamma|(V) \geqq h_\gamma(W \cap V) \geqq b(V) - n^{-1} \geqq k - n^{-1} \geqq k/2$

$$\frac{|h_\gamma|(W \cap U)}{|h_\gamma|(U)} \geqq 1 - 4(kn)^{-1}.$$

Autrement dit, il existe $\gamma \in \Gamma$ et $U \in \mathcal{G}_n$ tels que si $\mu = |h_\gamma|_{|U}/|h_\gamma|(U)$ on ait $\mu(W) \geqq 1 - 4(kn)^{-1}$.

Ainsi compte tenu que chaque $\mathcal{G}$ a un cardinal $\leqq \text{card.}\,\Gamma$, on voit qu'il existe une famille $(\mu_\delta)_{\delta \in \Delta}$ de probabilités sur $K$, avec card.$\Delta$ = card.$\Gamma$ et tel que pour tout ouvert $U$ de $K$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta \in \Delta$ avec $\mu_\delta(U) \geqq 1 - \varepsilon$. Il est alors clair que l'application $f \to (\mu_\delta(f))_{\delta \in \Delta}$ est une isométrie positive de $\mathscr{C}(K)$ sur un sous-espace de $l^\infty(\Delta)$, où card.$\Delta$ = card.$\Gamma$. C.Q.F.D.

## III. Le premier exemple

Soit $K$ un espace compact et $\mu$ une mesure sur $K$. On dira qu'un compact $L \subset K$ *supporte* $\mu$ si pour tout ouvert $U$ de $K$ on a $U \cap L \neq \emptyset \Rightarrow \mu(U \cap L) > 0$.

III.1. Lemme. *Soit $K$ un compact métrisable et $\mu$ une probabilité sur $K$. Soit $f$ une application de $K$ dans un compact $L$ et $\varepsilon$ un réel $> 0$. Supposons la mesure $f(\mu)$ diffuse. Alors il existe un compact $M \subset K$ tel que $\mu(M) \geqq 1 - \varepsilon$, que $M$ supporte $\mu$, et que pour tout $N$ compact $\subset M$, $N \neq M$, on ait $f(N) \neq f(M)$.*

Preuve. Soit $V_n$ une base d'ouverts de $K$ telle que pour tout ouvert $U$ de $K$ et tout $x \in U$ il existe $n$ avec $x \in V_n \subset \bar{V}_n \subset U$. Par induction on peut construire pour $n \geqq 1$ des compacts $M_n$ de $K$ et des ouverts $U_n$ de $L$ satisfaisant les conditions suivantes pour tout $n$:

(a) $M_{n+1}$ est le support de la restriction de $\mu$ à $(M_n \cap \bar{V}_n) \cup (M_n \backslash f^{-1}(U_n))$.
(b) $\mu(f^{-1}(U_n)) \leqq \varepsilon 2^{-n}$.
(c) Si $M_n \cap V_n \neq \emptyset$, on a $\mu(M_n \cap f^{-1}(U_n) \cap V_n) > 0$.
(d) Si $k < n$ on a

$$\mu(f^{-1}(U_n)\cap M_k \cap f^{-1}(U_k)\cap V_k)\leqq 2^{-n}\mu(M_k \cap f^{-1}(U_k)\cap V_k).$$

La construction est immédiate. Par induction on voit que $\mu(M_n)\geqq 1-\varepsilon(1-2^{-n})$ et que pour tous $k, n$ on a

$$\mu(M_n \cap f^{-1}(U_k)\cap V_k)\geqq(\tfrac{1}{2}+2^{-n})\mu(M_k \cap f^{-1}(U_k)\cap V_k).$$

Posons $M = \bigcap_n M_n$. Ainsi $\mu(M)\geqq 1-\varepsilon$. De plus, si un ouvert $U$ recontre $M$, soit $k$ tel que $V_k \cap M \neq \emptyset$ et $\overline{V_k}\subset U$. On a $f(M\backslash U)\subset f(M_k\backslash \overline{V_k})\subset L\backslash U_k$. D'autre part

$$\mu(M \cap f^{-1}(U_k)\cap V_k)\geqq \tfrac{1}{2}\mu(M_k \cap f^{-1}(U_k)\cap V_k)>0$$

donc $f(M\cap V_k)\cap U_k \neq \emptyset$. C.Q.F.D.

III.2. La Construction. Si la construction qui va suivre était effectuée en satisfaisant seulement aux conditions (1), (2), (3), (4-i), (4-ii), (6), le compact construit serait essentiellement le même que l'exemple de R. Haydon [2]. Nous ne saurions donc trop recommander au lecteur de se familiariser avec cet exemple avant d'aborder notre construction. Il est facile de voir que (P-6) equivaut au fait qu'il existe une mesure $\mu$ sur $K$, un compact metrisable $K_\omega$, et une surjection $\Gamma_\omega$ de $K$ sur $K_\omega$ telle pour toute $f \in \mathscr{C}(K)$ on ait

$$\frac{d}{d\mu_\omega}p_u(f_\mu)\neq 0, \qquad \text{où} \quad \mu_\omega = p_\omega(\mu).$$

L'idee naturelle est donc de commencer la construction avec un compact $K_\omega$ simple, et d'essayer de conserver la condition précédente. C'est le role des conditions (4-iii) et (5), qui malheureusement ne parlent guere à l'intuition. Elles permettrons de montrer que si $f \in \mathscr{C}(K)$ est telle que

$$\frac{d}{d\mu_\omega}p_\omega(f)=0,$$

$f$ est nulle "de proche en proche".

Désignons par $\Omega$ le premier ordinal non dénombrable. On va assumer l'hypothèse du continu, c'est à dire que $\Omega$ à la puissance du continu.

Posons $A=\{0,1\}^\Omega$ et pour tout $\alpha \leqq \Omega$ désignons par $A_\alpha$ l'ensemble des éléments de $A$ dont les coordonnées de rang $\geqq \alpha$ sont nulles. C'est un compact métrisable. Désignons par $p_\alpha$ la projection canonique de $A$ sur $A_\alpha$, ainsi que sa restriction à tout sous-ensemble de $A$.

Par induction sur $\alpha$, on va construire pour $\omega \leqq \alpha \leqq \Omega$ des compacts $K_\alpha \subset A_\alpha$, supportant des mesures $\mu_\alpha$, tels que si pour tout $\alpha$ $(G_\alpha^\gamma)_{\gamma<\Omega}$ désigne une énumération des Boréliens $\mu_\alpha$-négligeables de $K_\alpha$, où $G_\alpha^0$ est dense, les conditions suivantes soient vérifiées:

(1) $K_\omega = A_\omega$, et $\mu_\omega$ est la mesure naturelle de $A_\omega$ (qui est isomorphe à $\{0, 1\}^{\mathbf{N}}$).

(2) Pour $\beta < \alpha$, $K_\beta = p_\beta(K_\alpha)$, $K_\beta \subset K_\alpha$, $\mu_\beta = p_\beta(\mu_\alpha)$.

(3) Si $\alpha$ est limite, $K_\alpha = \overline{\bigcup_{\beta<\alpha} K_\beta}$, et $\mu_\alpha$ est la limite vague des $\mu_\beta$, pour $\beta < \alpha$ (dont il est aisé de voir l'existence).

(4) Si $\alpha$ n'est pas limite, on peut écrire $\alpha = \beta + 1$ et aussi $\alpha = \gamma + n$ où $\gamma$ est limite. Si $L_\beta = K_\alpha \backslash K_\beta$, l'ensemble $B = p_\beta(L_\beta)$ satisfait aux conditions suivantes:

(4-i) Pour $\delta \leqq \beta$, $p_\delta(B) \cap \bigcup_{\gamma<\alpha} G_\delta^\gamma = \varnothing$ (et ainsi $p_\delta(L_\beta)$ est d'intérieur vide dans $K_\delta$).

(4-ii) $\mu_\beta(B) \geqq 1 - n^{-1}$ et $B$ supporte $\mu_\beta$.

(4-iii) Pour $C$ compact, $C \subset B$, on a $p_\omega(C) \neq p_\omega(B)$.

(5) Pour tout ordinal $\gamma$, soit $\nu_\gamma$ l'image par $p_\omega$ de la restriction de $\mu_\gamma$ à $L_\gamma = K_{\gamma+1} \backslash K_\gamma$. On a $\nu_\gamma \leqq \mu_\omega$. Soit $f_\gamma = d\nu_\alpha / d\mu_\omega$. Pour chaque $\gamma$, on peut fixer une suite $H_\gamma^n$ de compacts de $p_\omega(L_\gamma)$, dont chacun supporte $\mu_\omega$, tels que la réunion des $(H_\gamma^n)_n$ soit dense dans $p_\omega(L_\gamma)$, et que $f_\gamma \geqq n^{-1}$ sur $H_\gamma^n$, de sorte que pour $\beta > \gamma$ et $n \in \mathbf{N}$, $p_\omega(L_\beta)$ soit d'intérieur vide dans $H_\gamma^n$.

(6) Si $\alpha = \beta + 1$, on a $\mu_\alpha = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$, où $\lambda_1$ est la restriction de $\mu_\beta$ à $K_\beta \backslash p_\beta(L_\beta)$, $\lambda_2$ est la moitié de la restriction de $\mu_\beta$ à $p_\beta(L_\beta)$ et $\lambda_3$ est l'image de $\lambda_2$ par la bijection $p_\beta^{-1}$ de $p_\beta(L_\beta)$ sur $L_\beta$.

Pour effectuer cette construction, seule est à vérifier la possibilité de choisir $B$ de sorte que (4) et (5) soit vérifiées. Mais il existe $D \subset K_\beta$, satisfaisant (4-i) tel que $\mu_\beta(D) \geqq 1 - n^{-2}$ et que $p_\omega(D)$ soit rare dans chaque $H_\gamma^n$ pour $\gamma < \beta$ et $n \in \mathbf{N}$. Le lemme fournit alors $B \subset D$ satisfaisant de plus (4-ii) et (4-iii), ce qui suffit, compte tenu du fait que pour $\gamma \leqq \beta$, $p_\gamma = p_\gamma \circ p_\beta$.

La construction est terminée. On va poser $K = K_\Omega$, $\mu = \mu_\Omega$. Les faits suivants seront utiles.

III.3. Proposition. (a) *Pour $\alpha < \Omega$, on a $\mu(K_\alpha) = 0$.*

(b) *Pour tout ensemble de Baire de mesure nulle $E$ de $K$, il existe $\alpha < \Omega$ tel que $E \subset K_\alpha$.*

Preuve. (a) Pour $\gamma < \Omega$ on a $p_\gamma(\mu) = \mu_\gamma$ et ainsi $\mu(K_\alpha) \leqq \mu_\gamma(K_\alpha)$. D'autre part, la suite $(\mu_\gamma(K_\alpha))_\gamma$ est décroissante, comme on le voit sans peine. Il existe donc $\gamma_0$ et $l \geqq 0$ tels que $\mu_\gamma(K_\alpha) = l$ pour $\gamma \geqq \gamma_0$. Supposons $l > 0$. On peut supposer $\gamma_0$ limite. Soit $\delta = \gamma_0 + n$ où $n^{-1} < l$. Alors par construction $K_{\delta+1} = K_\delta \cup L_\delta$ où $\mu_\delta(p_\delta(L_\delta)) \geqq 1 - n^{-1}$. Ainsi $p_\delta(L_\delta) \cap K_\alpha \neq \varnothing$, ce qui montre par construction que $\mu_{\delta+1}(K_\alpha) < \mu_\delta(K_\alpha)$, ce qui est contradictoire. Ainsi $\mu(K_\alpha) = 0$.

(b) Il existe $\delta < \Omega$ tel que $p_\delta(E)$ soit un borélien de mesure nulle de $K_\delta$. Ainsi il existe $\alpha$ tel que $p_\delta(E) = G_\delta^\alpha$. Il résulte alors de la condition (4-iii) que $E \subset p_\delta^{-1}(G_\delta^\alpha) \subset K_\alpha$. C.Q.F.D.

III.4. *$M(K)$ est vaguement séparable*

Soit $g_n$ une partie normiquement dense de $\mathscr{C}(K_\omega)$. On va montrer que la suite des mesures $\mu_n = g_n \circ p_\omega d\mu$ est vaguement dense dans $M(K)$. Il est clair qu'il suffit de prouver que pour toute $f \in \mathscr{C}(K)$, on a $f = 0$ dès que $\mu_n(f) = 0$ pour tout $n$. Supposons donc cette dernière condition réalisée. On a alors $\int f(t) \circ g \circ p_\omega(t) d\mu(t) = 0$ pour toute fonction borélienne bornée $g$ sur $K_\omega$. Supposons $f \neq 0$, et soit $\alpha$ le plus petit ordinal tel que $f$ ne soit pas identiquement nulle sur $K_\alpha$. Il est impossible que $\alpha$ soit limite, car alors $f$ est nulle sur la réunion des $K_\beta$ pour $\beta < \alpha$, qui est dense dans $K_\alpha$. On a donc $\alpha = \beta + 1$. Il existe donc un ouvert $V$ de $K$ rencontrant $K_\alpha$ tel que l'on ait, pour fixer les idées, $f(t) > \varepsilon > 0$ pour $t \in V$. On peut supposer que $V = V_1 \times V_2$, où $V_1$ ne dépend que des coordonnées de rang $< \alpha$ et $V_2$ est l'ensemble des points de $K$ dont les coordonnées de rang $\gamma \in J$ sont nulles, où $J$ est une partie finite de $[\alpha, \Omega[$. Pour $\gamma \geqq \alpha$, $p_\alpha(L_\gamma)$ est d'intérieur vide dans $K_\alpha$ d'après (4-i). Il existe donc un ouvert non vide $W$ de $K_\alpha$ tel que $p_\alpha(L_\gamma) \cap W = \emptyset$ pour $\gamma \in J$, et donc tel que $p_\alpha^{-1}(W) \subset V$. Puisque $W \subset V_1$, et que $f > 0$ sur $V$, on a $W \subset L_\beta = K_\alpha \backslash K_\beta$. D'après la condition (4-iii) on a $p_\omega(L_\beta \backslash W) \neq p_\omega(L_\beta)$. Il existe donc un ensemble $T$, ouvert dans $p_\omega(L_\beta)$, tel que $p_\omega^{-1}(T) \cap L_\beta \subset W$. Soit $n$ tel que $H_\beta^n \cap T \neq \emptyset$. Par hypothèse, $f$ est nulle sur $K_\beta$. Il existe donc un voisinage $V'$ de $K_\beta$ sur lequel $|f| < \varepsilon/4n$. Il existe une partie finie $I \subset [\beta, \Omega[$ telle que $V'$ contienne l'ensemble des éléments de $K$ dont les composantes de rang $\gamma$ sont nulles, pour $\gamma \in I$. Posons $I' = I \backslash \{\beta\}$. D'après la condition (5) l'ensemble $p_\omega(B) \backslash \bigcup_{\gamma \in I'} p_\omega(K_{\gamma+1} \backslash K_\gamma)$ rencontre $H_\beta^n$ en un ouvert dense. Il existe donc un ensemble $T' \subset T$, ouvert dans $H_\beta^n$ et tel que $T' \cap p_\omega(K_{\gamma+1} \backslash K_\gamma) = \emptyset$ pour $\gamma \in I'$. Soit $t \in K$ tel que $p_\omega(t) \in T'$. Pour $\gamma \in I'$ on ne peut avoir $p_{\gamma+1}(t) \in K_{\gamma+1} \backslash K_\gamma$, car on aurait $p_\omega(t) \in p_\omega(K_{\gamma+1} \backslash K_\gamma)$. Ainsi la composante de rang $\gamma$ de $t$ est nulle. Si la composante de rang $\beta$ de $t$ est nulle on a $t \in V'$ Sinon $p_\alpha(t) \in L_\beta$, et puisque $p_\omega(p_\alpha(t)) \in T$, on a $p_\alpha(t) \in W$ et ainsi $t \in V$.

Soit $g = \chi_{T'}$. Evaluons $\int g(t) f(t) d\mu(t)$. Posons

$$E_1 = \{t \in K ; p_\omega(t) \in T', p_\alpha(t) \in L_\beta\}, \quad E_2 = \{t \in K ; p_\omega(t) \in T', p_\alpha(t) \in K_\beta\}.$$

On vient de montrer que $E_1 \subset V$ et $E_2 \subset V'$. On a donc

$$\int g(t) f(t) d\mu(t) = \int_{E_1} f d\mu + \int_{E_2} f d\mu \geqq \varepsilon \mu(E_1) - \frac{\varepsilon}{4n} \mu(E_2).$$

Or $\mu(E_2) \leqq \mu_\omega(T')$ car $E_2 \subset p_\omega^{-1}(T')$. D'autre part

$$\mu(E_1)=\mu_\alpha(L_\beta\cap p_\alpha^{-1}(T'))=\tfrac{1}{2}\mu_\beta(p_\beta(L_\beta)\cap p_\alpha^{-1}(T'))=\tfrac{1}{2}\nu_\beta(T')\geqq\frac{1}{2n}\mu_\omega(T')$$

car $T'\subset H_\beta^n$ et $d\nu_\beta/d\mu_\omega\geqq 1/n$ sur $H_\beta^n$. Ainsi, puisque $\mu_\omega(T')>0$ on a

$$\int g(t)f(t)d\mu(t)\geqq\frac{\varepsilon}{2n}\mu_\omega(T')-\frac{\varepsilon}{4n}\mu_\omega(T')>0$$

ce qui est contradictoire.

III.5. *Preuve que $\mathscr{C}(K)$ ne s'injecte pas dans $l^\infty$*

Dans le théorème II.2, il suffit de montrer que la boule unité $B$ de $M(K)$ n'est pas vaguement séparable. Toute mesure $\lambda$ sur $K$ s'écrit $\lambda=\lambda_1+\lambda_2$ où $\lambda_1\perp\mu$ et $\lambda_2\ll\mu$. Soit $(\lambda^n)$ une suite de $B$. Il suffit d'exhiber une fonction continue $f$ sur $K$, de norme 1, et telle que $|\lambda^n(f)|\leqq 1/2$ pour tout $n$. D'après III.3, il existe $\alpha<\Omega$ et des fonctions boréliennes $h_n$ sur $K_\alpha$ telles que $\lambda^n=\nu^n+h_n\circ p_\alpha d\mu$, où chaque $\nu^n$ est portée par $K_\alpha$. Si $f$ est la fonction caractéristique $p_{\alpha+1}^{-1}(L_\alpha)$, on a pour tout $n$

$$\int fd\lambda^n=\int f(t)h_n\circ p_\alpha(t)d\mu(t)=\int_{L_\alpha}h_n\circ p_\alpha(t)d\mu(t)=\frac{1}{2}\int_{p_\alpha(L_\alpha)}h_nd\mu_\alpha$$

et puisque $\|\lambda^n\|\leqq 1$ on a $\int|h_n|d\mu_\alpha\leqq 1$, d'où $|\int fd\lambda^n|\leqq 1/2$, ce qui suffit.

III.6. COROLLAIRE. *Le cône positif $M_+(K)$ n'est pas vaguement séparable.*

PREUVE. C'est un exercice facile de voir que la séparabilité vague de $M_+(K)$ implique celle de l'espace des probabilités, et donc de la boule unité de $M(K)$.

III.7. PROBLÈME. L'auteur a construit [3] un espace de Banach $E$ dont le dual est préfaiblement $(=\sigma(E',E))$ séparable mais tel qu'il existe une forme linéaire dont la restriction à toute partie bornée préfaiblement séparable soit préfaiblement continue, sans que cette forme linéaire ne soit préfaiblement continue (cette condition est naturellement plus forte que le fait que la boule unité de $E'$ ne soit pas préfaiblement séparable). Peut-on prendre $E$ de la forme $\mathscr{C}(K)$?

## IV. Le second exemple

L'idée est simple. Le compact $K$ doit porter une suite $(\mu_n)$ de probabilités, telles que pour tout $\varepsilon>0$ et tout ouvert $V$ de $K$ il existe $n$ avec $\mu_n(V)\geqq 1-\varepsilon$. Il est donc naturel de considérer une suite de compacts $S_n$ portant des probabilités $\mu_n$, et d'essayer de la plonger convenablement dans un compact $K$. On va naturellement choisir $S_n$ de sorte que si $S_n$ porte $\nu$, et $L_1(\nu)$ est séparable en norme, le support de $\nu$ soit rare dans $S_n$, et on choisira le plongement de sorte que si $A_n \subset S_n$ est rare, $\bigcup A_n$ soit rare dans $K$. On va aussi construire $K$ de sorte qu'aucun $K_\sigma$ de $K \setminus \bigcup A_n$ ne soit dense dans $K$. Ces conditions assurent que $K$ n'est pas le support d'une mesure $\lambda$ telle que $L_1(\lambda)$ soit séparable.

IV.1. Notations. Désignons par $\nu$ la mesure canonique sur $\{0,1\}^{\mathbf{R}}$ et par $S$ le spectre de $L^\infty(\nu)$. Désignons par $\mu$ la mesure induite par $\nu$ sur $S$. Alors il est clair que si $L^1(\lambda)$ est séparable en norme on a $\lambda \perp \mu$. D'autre part, il est classique que tout ensemble négligeable de $S$ est d'adhérence négligeable, donc contenu dans un fermé négligeable de Baire, et $S$ contient card.$\mathbf{R}$ = card.$\Omega$ fermés de Baire. Il existe donc une suite transfinie croissante $(H_\alpha)_{\alpha<\Omega}$ de fermés négligeables de $S$, telle que tout ensemble négligeable de $S$ est contenu dans un des $H_\alpha$.

Désignons par $T$ la somme topologique discrète de copies $S_n$ de $S$, et par $\mu_n$ la copie de $\mu$ sur $S_n$. Soit $(W_\alpha)_{\alpha<\Omega}$ une famille d'ensembles, telle que chacun d'eux soit un ouvert-fermé (o-f) de l'un des $S_n$, et que chaque o-f de chaque $S_n$ appartienne à cette famille. Pour tout $\alpha$ et tout $n$, soit $H^n_\alpha$ la copie de $H_\alpha$ dans $S_n$.

IV.2. *Construction*

On va construire une famille croissante $(\mathcal{A}_\alpha)_{\alpha<\Omega}$ convenable d'algèbres dénombrables d'o-f de $T$. Chaque $\mathcal{A}_\alpha$ est l'algèbre des o-f d'un compact totalement discontinu $K_\alpha$ (tout élément de $\mathcal{A}_\alpha$ sera regardé selon le cas comme un o-f de $T$ ou o-f de $K_\alpha$). Pour $\alpha \geqq \beta$ il existe une application naturelle $\varphi_{\beta,\alpha}$ de $K_\alpha$ sur $K_\beta$, et pour chaque $\alpha$ une application naturelle $\psi_\alpha$ de $T$ dans $K_\alpha$. On désigne par $(L^\gamma_\alpha)_{\gamma<\Omega}$ une énumération des compacts de $K_\alpha$ disjoints de $\psi_\alpha(T)$. (On ne suppose pas $L^\gamma_\alpha$ non vide, ni $L^\gamma_\alpha \neq L^{\gamma'}_\alpha$ pour $\gamma \neq \gamma'$.) On va effectuer la construction de sorte que les propriétés suivantes soient vérifiées:

(a) $\forall \alpha$, $\forall U \in \mathcal{A}_\alpha$, $\forall \varepsilon > 0$, $\forall p \in \mathbf{N}$, $\exists n \geqq p$; $\mu_n(U \cap S_n) \geqq 1 - \varepsilon$.

(b) Pour tout $\alpha \geqq 1$, il existe un o-f $W$ de $K_{\alpha+1}$ vérifiant les deux propriétés suivantes:

(i) On a $W \cap S_\tau = W_\alpha$, ou $\tau$ est tel que $W_\alpha$ soit un ouvert de $S_\tau$.

(ii) $\varphi_{\alpha,\alpha+1}(W) \cap \varphi^{-1}_{\beta,\alpha}(L^\gamma_\beta) = \varnothing$ pour tout $\beta, \gamma \leqq \alpha$.

(iii) $W_\alpha \cap S_n \cap H^n_\alpha = \varnothing$ pour tout $n$.

Pour effectuer cette construction on pose $\mathcal{A}_0 = \{\varnothing, T\}$. Lorsque $\alpha$ est limite, on pose $\mathcal{A}_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{A}_\beta$. Reste donc à décrire comment construire $\mathcal{A}_{\alpha+1}$ lorsque $\mathcal{A}_\alpha$ est donné. Les ensembles $\varphi^{-1}_{\beta,\alpha}(L^\gamma_\beta)$ sont disjoints de $\psi_\alpha(T)$, pour $\beta, \gamma \leqq \alpha$. Il existe donc une suite croissante $(M_m)$ de compacts de $K_\alpha$, disjoints de $\varphi_\alpha(T)$ et telle que tout $\varphi^{-1}_{\beta,\alpha}(L^\gamma_\beta)$ soit contenu dans un $M_m$. Pour chaque $m$, existe une suite croissante $A_{p,m} \in \mathcal{A}_\alpha$, telle que $S_l \subset A_{p,m}$ pour $l \leqq p$ et $A_{p,m} \cap M_m = \varnothing$.

On peut énumérer $\mathcal{A}_\alpha = (B_k)$. On va construire par induction sur $k$ une suite croissante $(p_k)$ et une suite double $(l_{i,k})_{i \leqq 2k}$ de sorte que les propriétés suivantes soient vérifiées:

(i) Si pour $j \leqq k$ on a $E_{k-1,j} = B_j \cap A_{p_1,1} \cap A_{p_2,2} \cap \cdots \cap A_{p_{k-1},k-1} \neq \emptyset$, alors $E_{k,j} = E_{k-1,j} \cap A_{p_k,k} \neq \emptyset$.

(ii) Si $k < k'$ ou $i < i'$, on a $l_{k,i} < l_{k',i'}$; on a $l_{k,i} < p_{k'}$ si $k < k'$, et on a $p_1 \geqq \tau$ ou $\tau$ est tel que $W_\alpha \subset S_\tau$.

(iii) Pour $j \leqq k$, si $E_{k,j} \neq \emptyset$, on a $\mu_{l_{k,2j}}(E_{k,j} \cap S_{l_{k,2j}}) \geqq 1 - 2^{-k}$.

(iv) Pour $j \leqq k$ si $B_j \neq \emptyset$ on a $\mu_{l_{k,2j-1}}(B_j \cap S_{l_{k,2j-1}}) \geqq 1 - 2^{-k}$.

Cette construction ne présente pas de difficulté. Puisque pour tout $k$ on a $T = \bigcup_l A_{l,k}$, il suffit de prendre $p_1$ assez grand, puis à chaque étape $p_k$ assez grand; on construit à chaque étape les $l_{k,i}$ par induction sur $i$ de sorte que les conditions (ii) à (iv) soient vérifiées, ce qui est possible compte tenu de ce que $E_{k,j}$ et $B_j$ appartiennent à $\mathcal{A}_\alpha$ et de la condition (a).

Soit maintenant pour tout $k$ et tout $j \leqq k$ un sous-ensemble $P_{k,j}$ de $E_{k,j} \cap S_{l_{k,2j}}$ tel que $P_{k,j} \cap H_\alpha^{l_{k,2j}} = \emptyset$ et que $\mu_{l_{k,2j}}(P_{k,j}) \geqq 1 - 2^{-k+1}$ si $E_{k,j} \neq \emptyset$.

Posons

$$W = W_\alpha \cup \bigcup_{k \in \mathbf{N}, j \leqq k} P_{j,k}.$$

C'est un o-f de $T$. Soit $\mathcal{A}_{\alpha+1}$ l'algèbre engendrée par $\mathcal{A}_\alpha$ et $W$.

On va montrer qu'elle satisfait aux conditions requises. Remarquons d'abord que pour tout $n$, on a $W \subset A_{p_n,n}$. En effet on a $W_\alpha \subset S_\tau \subset A_{p_n,n}$ car $\tau \leqq p_n$, et pour $k < n$ on a $P_{j,k} \subset A_{p_n,n}$ car $p_n \geqq l_{k,2j}$, donc $P_{k,j} \subset S_{l_{k,2j}} \subset A_{p_n,n}$ et pour $k \geqq n$, on a $P_{j,k} \subset E_{j,k} \subset A_{p_n,n}$. On a donc $\varphi_{\alpha,\alpha+1}(W) \cap M_m = \emptyset$ pour tout $m$. D'autre part on a $W \cap S_n \cap H_\alpha^n = \emptyset$ pour tout $\alpha$. Ainsi la condition (b) est vérifiée. Prouvons la condition (a). Tout élément de $\mathcal{A}_{\alpha+1}$ est de la forme $B_j \cap W$ ou $B_j \cap W^c$. S'il est de la forme $B_j \cap W$, et si $E_{j,j}$ est vide, alors $B_j \cap W$ est vide car $W \subset \bigcap_{l \leqq j} A_{p_l,l}$. Si $E_{j,j}$ n'est pas vide, d'après (i), $E_{k,j}$ n'est pas vide pour $k \geqq j$. On a alors $P_{k,j} \subset W \cap B_j$ et $\mu_{l_{k,2j}}(P_{k,j}) \geqq 1 - 2^{-k+1}$. S'il est de la forme $B_j \cap W^c$, où $B_j$ est non vide on a

$$B_j \cap S_{l_{k,2j-1}} \subset B_j \cap W^c \quad \text{avec} \quad \mu_{l_{k,2j-1}}(B_j \cap S_{l_{k,2j-1}}) \geqq 1 - 2^{-k}$$

ce qui suffit. La construction est terminée.

Posons $\mathcal{A} = \bigcup_{\alpha < \Omega} \mathcal{A}_\alpha$. Soit $K$ le compact correspondant.

D'après (b), (iii), chaque $S_n$ s'injecte naturellement dans $K$. On appelle encore $S_n$ son image et $\mu_n$ la mesure correspondante. D'après la condition (a), pour tout ouvert-fermé $U$ de $K$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe $n$ tel que $\mu_n(U) \geqq 1 - \varepsilon$. On en déduit sans peine par le théorème de Hahn–Banach que l'enveloppe convexe des $\mu_n$ (donc l'ensemble des combinaisons convexes de $\mu_n$ à coefficiants rationnels) est vaguement dense dans l'ensemble des probabilités sur $K$.

Soit $\lambda$ une mesure sur $K$ telle que $L^1(\lambda)$ soit séparable. On va montrer que le support de $\lambda$ n'est pas $K$ tout entier. On peut supposer $\lambda > 0$, on peut écrire $\lambda = \lambda_0 + \Sigma_n \lambda_n$ ou $\lambda_0(S_n) = 0 \; \forall n$, et $\lambda_n$ est portée par $S_n$. Pour tout $n$, $L^1(\lambda_n)$ étant séparable, on a $\lambda_n \perp \mu_n$. Donc $\lambda_n$ est portée par un ensemble de Baire négligeable portant $\lambda_n$. Il existe donc $\alpha_1 < \Omega$ tel que $H^n_{\alpha_1}$ porte $\lambda_n$ pour tout $n$. D'autre part, $\lambda_0$ est porté par une réunion dénombrables de compact $G_\delta$ disjoints des $S_n$. Il existe donc $\alpha_2 < \Omega$ tels que si $\theta$ désigne l'application naturelle de $K$ sur $K_{\alpha_2}$, $\theta(\lambda_0)$ ne charge aucun $\varphi_\alpha(S_n)$, et donc soit portée par la réunion des $L^\beta_{\alpha_2}$ pour $\beta \leqq \alpha_3 < \Omega$. Soit $\alpha = \mathrm{Sup}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Il est clair que l'o-f $W$ de $K_{\alpha+1}$ de la condition (b) est tel que $\lambda_n(W) = 0$ pour tout $n$ et que $\lambda_0(W) = 0$. On a ainsi $\lambda(W) = 0$. C.Q.F.D.

## Bibliographie


1. Y. Benyamini, *An M-space which is not isomorphic to a C(K) space*, Israel J. Math. **28** (1977), 98–102.

2. R. Haydon, *On dual $L^1$-spaces and injective bidual Banach spaces*, Israel J. Math. **31** (1978), 142–152.

3. W. B. Johnson and J. Lindenstrauss, *Some remarks on weakly compactly generated Banach spaces*, Israel J. Math. **17** (1974), 219–230.

4. M. Talagrand, *Certaines formes linéaires pathologiques sur un espace de Banach dual*, Israel J. Math. **35** (1980), 171–176.

5. J. D. M. Wright, *On C*-algebras which are almost separably representable*, J. London Math. Soc. **18** (1978), 147–150.



Equipe d'Analyse — Tour 46
Université Paris VI
4, Place Jussieu
75230 Paris Cedex 05, France